Ova glava posvećena je relativističkoj formulaciji elektrodinamike. Prvo ćemo se podsetiti prostora Minkovskog i Lorencovih transformacija. U narednim poglavljima uvešćemo četvorovektore gustine struje i potencijala. U nastavku su dati zakon održanja nalektrisanja i jednačine elektromagnetnih potencijala u kovarijantnom obliku. Polazeći od pojma rotora vektora u prostoru Minkovskog neposredno je napisan tenzor elektromagnetnog polja koji ima šest nezavisnih komponenata. Maksveloe jednačine za vakuum su napisane u vidu dveju kvadrivektorskih jednačina sličnog oblika, pri čemu u jednoj od njih figuriše sam tenzor elektromagnetnog polja, a u drugoj odgovarajući dualni tenzor. Na kraju su napisane relacije koje izražavaju zakon transformacije komponenata jačine električnog polja i magnetne indukcije pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi.

1. Prostor od *n* dimenzija

Po analogiji sa pojmom tačke u trodimenzionom Euklidovom prostoru, ma kakav uređeni skup

$$x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \tag{1}$$

naziva se tačka, a same veličine x^p koordinate tačke, pri čemu smo upotrebili po konvenciji gornje indekse. Skup svih tako definisanih tačaka predstavlja *n-dimenzioni afini prostor*, koji u opštem slučaju ne mora biti metrički.

2. Transformacije koordinata

Neka su $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ i $\left(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n\right)$ koordinate iste tačke u dva razna sistema i neka između tih koordinata postoje relacije oblika

$$x'^p = x'^p\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \tag{2}$$

Pretpostavimo da se ove relacije mogu rešiti po starim koordinatama

$$x^p = x^p\left(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n\right)$$

za što je potrebno da bude zadovoljen uslov da odgovarajući jakobijan bude različit od nule

$$\Delta \equiv \left|\frac{\partial x'^p}{\partial x^q}\right| \neq 0 \tag{3}$$

Takve relacije, koje uvek moraju biti unapred date, definišu *transformacije koordinata* iz jednog sistema u drugi. Kao najvažnije navodimo homogene linerane transformacije

$$x'^p = \sum_{q=1}^{n} \alpha_q^p x^q .$$

Radi konciznijeg pisanja uvodi se tzv. Ajnštajnova konvencija o sabiranju: u svakom izrazu gde se isti indeks ponavlja dva puta, i to jednom kao gornji, a jednom kao donji, podrazumeva se sumiranje po tom indeksu. Tada se navedene transformacije mogu pisati u obliku

$$x'^p = \alpha_q^p x^q . \tag{2.4}$$

3. Klasifikacija veličina

Skalari ili invarijante. Neka je izvesna veličina u prvobitnom sistemu koordinata određena funkcijom $\phi = \phi\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$, a u transformisanom istemu funkcijom $\phi' = \phi'\left(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n\right)$. Ako je u svakoj tački prostora

$$\phi\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) = \phi'\left(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n\right) \tag{5}$$

tj. ako vrednost ove funkcije ostaje pri tome nepromenjena, ona se naziva *skalar* ili *invarijanta*.

Kontravarijantni i kovarijantni vektori

Uočimo sada skup od *n* veličina $A(p)$. Ako se ove veličine pri transformacijama koordinata (2) transformišu prema zakonu

$$A'(p) = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} A(q)$$

tada se skup $A(p)$ naziva *kontravarijantni vektor*, a njegove komponente se označavaju gornjim indeksom. Ako indeks q u parcijalnom izvodu $\partial x'^p / \partial x^q$ formalno smatramo donjim, gornji zakon transformacije možemo napisati u obliku

$$A'^p = \frac{\partial x'^p}{\partial x^q} A^q \tag{6}$$

pri čemu se prema Ajnštajnovoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksu q. U slučaju homogenih linearnih transformacija (4) biće

$$\frac{\partial x'^p}{\partial x^q} = \alpha_q^p$$

pa gornji zakon dobija prostiji oblik

$$A'^p = \alpha_q^p A^q . \tag{7}$$

Ako pak imamo *n* veličina A_p, koje se transformišu prema zakonu

$$A'_p = \frac{\partial x^q}{\partial x'^p} A_q \tag{8}$$

ovaj skup A_p se naziva *kovarijantni vektor* i njegove komponente se označavaju donjim indeksom.

Kontravarijantni, kovarijantni i mešoviti tenzori

Uočimo sada skup od n^2 veličina $A(p,q)$ Ako se ove veličine pri transformaciji koordinata (2) transformišu prema zakonu

$$A'(p,q) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x'^p}{\partial x^r} \frac{\partial x'^q}{\partial x^s} A(r,s) \ ,$$

takav skup $A(p,q)$ naziva se *kontravarijantni tenzor*, a njegove komponente se označavaju gornjim indeksima. Tada se ovaj zakon transformacije može napisati u obliku

$$A'^{pq} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^r} \frac{\partial x'^q}{\partial x^s} A^{rs} \tag{9}$$

pri čemu se prema Ajnštajnovoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksima r i s. U slučaju homogenih linearnih transformacija (4) imaćemo

$$A'^{pq} = \alpha_r^p \alpha_r^q A^{rs} \ .$$

Ako pak zakon transformacija ima oblik

$$A'_{pq} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^p} \frac{\partial x^s}{\partial x'^q} A_{rs}$$

skup A_{pq} se naziva *kovarijantan tenzor*, a ako je

$$A'^p_q = \frac{\partial x'^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^q} A^r_s \,,$$

skup A^p_q se naziva *mešoviti tenzor*.

4. Rimanovi prostori

Pretpostavimo sad da je u *n*-dimenzionom prostoru definisana tzv. *metrika prostora*, koja se uvodi na sledeći način. Po analogiji sa metrikom u trodimenzionom Euklidovom prostoru *kvadratna forma oblika*

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q \tag{10}$$

koja ostaje invarijantna pri transformacji koordinata (2) naziva se *metrička forma prostora*, a veličina ds definisana gornjim izrazom predstavlja rastojanje između tačaka x i $x + dx$. Ovde se podrazumeva sumiranje po indeksima p i q. Ovakav prostor se u opštem slučaju naziva *Reimannov prostor*.

Pošto je ds^2 po definici skalar, a dx^p i dx^q kontravarijantni vektori, skup g_{pq} predstavlja konvarijantan tenzor. Ovako definisan tenzor $g_{pq} = g_{qp}$ (simetričan tenzor) naziva se metrički ili fundamentalni tenzor i on je potpuno određen shemom svojih koeficijenata

$$g = \begin{pmatrix} g_{11}\ g_{12}\ \cdots g_{1n} \\ g_{21}\ g_{22}\ \cdots g_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}\ g_{n2}\ \cdots g_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Ako je metrička forma (10) pozitivno definitna, tj. ako je $ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q \geq 0$ i ako izvesnom transformacijom koordinata može svesti na oblik

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \ldots + \left(dx^n\right)^2 \ , \tag{12}$$

posmatrani prostor se naziva *Euklidski*. U ovom slučaju svi koeficijenti g_{pq} za $p \neq q$ jednaki nuli, a za $p = q$ jedinici, što se može izraziti pomoću Kronekerovog simbola: $g_{pq} = \delta_{pq}$. Ako metrička forma (10) nije pozitivna i ako se izvesnom transformacijom koordinata može svesti na oblik

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \ldots + \left(dx^k\right)^2 - \ldots - \left(dx^n\right)^2 , \tag{13}$$

takav prostor se naziva *pseudoeuklidski prostor*.

5. Prostor (svet) Minkovskog

Formulišimo četvorodimenzioni prostor u kome svakom događaju odgovara jedna tačka i obrnuto. Rimanov prostor se definiše kao skup tačaka

$$\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$$

u kome se rastojanje između dveju beskonačno bliskih tačaka definiše metričkom formom oblika

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q \tag{14}$$

pod uslovom da ovaj izraz ostaje invarijantan pri prelazu u drugi sistem koordinata. Kao izraz takvog oblika može nam služiti kvadrat intervala između dva beskonačno bliska događaja

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \tag{15}$$

koji je invarijantan u odnosu na Lorencove transformacije, tj. ne menja se pri prelazu u drugi inercijalni sistem. Sam oblik ove metrike sugeriše nam, generališući razmatranje iz prethodnog odeljka, da za skup koordinata uzmemo skup

$$x^1 = x \ , \ x^2 = y \ , \ x^3 = z \ , \ x^4 = ct$$

pri čemu se u literaturi umesto x^4 često koristi oznaka $x^0 = ct$. Sa ovim oznakama prethodni izraz za metriku dobija oblik

$$ds^2 = -\left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 + \left(dx^4\right)^2 \tag{16}$$

čiji je metrički tenzor određen matricom

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Ovako definisan četvorodimenzioni prostor naziva se *prostor ili svet Minkowskog*. Ovaj prostor je realan, ali nije euklidski već *pseudoeuklidski*.

6. Lorencove transformacije u prostoru Minkovskog

Polazeći od Lorencovih transformacija koordinata u obliku

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \ , \ y' = y \ , \ z' = z \ , \ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

ove transformacije u četvorodimenzionom sistemu možemo napisati u obliku:

$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{-u / c}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} x^4$$

$$x'^2 = 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$$

$$x'^3 = 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4$$

$$x'^4 = \frac{-u / c}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} x^4$$

i uvedemo oznake

$$\beta = u / c, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

vidimo da su one određene shemom odgovarajućih koeficijenata

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{18}$$

Tada Lorencove transformacije dobijaju koncizan oblik

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \tag{19}$$

što prema Ajnštajnovoj konvenciji o sumiranju možemo pisati u obliku

$$x'^{\mu} = \alpha_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \tag{20}$$

Pri tome ćemo grčkim slovima označavati indekse koji uzimaju vrednosti 1,2,3,4, a latinskim one koji se protežu samo do 3.

7. Tenzorske veličine u prostoru Minkovskog

U prostoru Minkovskog ulogu zakona transformacije koordinata igraju Lorencove transformacije u vidu $x'^{\mu}=\alpha^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$, gde je $(\mu=1,2,3,4)$ i u odnosu na njih se odgovarajuće tenzorske veličine mogu definisati na sledeći način. Ako se neka veličina u jednom inercijalnom sistemu određuje funkcijom $\phi\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$, a u drugom funkcijom $\phi'\left(x'^1,x'^2,x'^3,x'^4\right)$ i ako je u svakoj tački prostora ispunjen uslov

$$\phi'\left(x'^1,x'^2,x'^3,x'^4\right)=\phi\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right) \tag{21}$$

za tu veličinu kažemo da je *skalar* ili *invarijanta.* Ako imamo neki skup od 4 veličina $A^{\mu}\left(A^1,A^2,A^3,A^4\right)$ takav da se u odnosu na navedeni zakon trasnformacije koordinata transformiše po zakonu

$$A'^{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}=\alpha^{\mu}_{\nu}A^{\nu} \tag{22}$$

takav skup $\left(A^1,A^2,A^3,A^4\right)$ predstavlja *kontravarijantne komponente vektora* u prostoru Minkovskog koji ćemo zvati *kvadrivektor.* Ako pak imamo skup od 16 veličina $A^{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3,4)$ koje se pri tome transformišu po zakonu

$$A'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}A^{\rho\sigma}=\alpha^{\mu}_{\rho}\alpha^{\nu}_{\sigma}A^{\rho\sigma} \tag{23}$$

takav skup $A^{\mu\nu}$ predstavlja <u>kontravarijantne komponente tenzora</u> u prostoru Minkovskog.

Napišimo sada transformacione relacije za <u>kontravarijantne vektor</u>e u eksplicitnom obliku. Na osnovu sheme koeficijenata (18) imamo

$$A'^1=\alpha^1_{\nu}A^{\nu}=\alpha^1_1A^1+\alpha^1_2A^2+\alpha^1_3A^3+\alpha^1_4A^4=\gamma\left(A^1-\beta A^4\right)$$

$$A'^2=\alpha^2_{\nu}A^{\nu}=A^2$$

$$A'^3=\alpha^3_{\nu}A^{\nu}=A^3$$

$$A'^4=\alpha^4_{\nu}A^{\nu}=\alpha^4_1A^1+\alpha^4_2A^2+\alpha^4_3A^3+\alpha^4_4A^4=\gamma\left(A^4-\beta A^1\right)$$

dakle, komponente kvadrivektora u prostoru Minkovskog transformišu se prema zakonu

$$A'^1 = \gamma\left(A^1 - \beta A^4\right),\ A'^2 = A^2,\ A'^3 = A^3,\ A'^4 = \gamma\left(A^4 - \beta A^1\right) \tag{24}$$

Na sličan način možemo naći i transformacione relacije za tenzore, ali se ograničimo na *antisimetrične tenzore*. Oni su definisani uslovom $A^{\nu\mu} = -A^{\mu\nu}$ iz čega neposredno sledi da za $\mu = \nu$ mora biti $A^{\mu\mu} = 0$ te ovakvi tenzori imaju samo šest nezavisnih komponenata.

Prema obrascu (23) imamo na pr. za $\mu = 1$ i $\nu = 2$

$$A'^{12} = \alpha^1_\rho \alpha^2_\sigma A^{\rho\sigma}$$

a iz sheme (18) vidimo da u ovoj dvostrukoj sumi preostaju samo oni članovi kod kojih je $\rho = 1$ ili 4, a $\sigma = 2$

$$A'^{12} = \alpha^1_1 \alpha^2_2 A^{12} + \alpha^1_4 \alpha^2_2 A^{42} = \gamma\left(A^{12} - \beta A^{42}\right) = \gamma\left(A^{12} + \beta A^{24}\right).$$

Sličnim postupkom možemo naći i ostale komponente, tako da dobijamo

$$\begin{aligned} &A'^{12} = \gamma\left(A^{12} + \beta A^{24}\right),\ A'^{13} = \gamma\left(A^{13} + \beta A^{34}\right),\ A'^{14} = A^{14} \\ &A'^{23} = A^{23},\ A'^{24} = \gamma\left(A^{24} + \beta A^{12}\right),\ A'^{34} = \gamma\left(A^{34} + \beta A^{13}\right) \end{aligned} . \tag{25}$$

Polazeći od kontravarijantnih, možemo dobiti i kovarijantne komponente vektora prema obštem obrascu $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$ gde je skup $g_{\mu\nu}$ metrički tenzor. U našem slučaju za $\mu = 1$ prema šemi (17) imačemo

$$A_1 = g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 + g_{14} A^4 = -A^1$$

a na sličan način možemo dobiti i ostale kovarijantne komponente

$$A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3,\ A_4 = A^4\ . \tag{26}$$

8. Kovarijantna formulacija fizičkih zakona

Pošto su uvedene Lorencove transformacije i prostor Minkovskog, možemo sada matematički formulisati <u>*princip ekvivalentnosti inercijalnih sistema*</u>*, tj. zahtev da svi fizički zakoni moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima.*

Neka su $A, B, \ldots$ niz fizičkih veličina koje ulaze u neki fizički zakon, i neka ove veličine meri posmatrač u izvesnom sistemu S i koje mogu biti izvesne funkcije koordinata i vremena. Tada fizički zakon ima oblik jedne ili više jednačina tipa

$$f_i\left(A, B, \ldots, \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}, \ldots\right) = 0 \tag{27}$$

koje mogu sadržavati i izvode prvog i višeg reda po prostornim koordinatama i vremenu.

Posmatrač vezan za neki drugi sistem S', koristeći se istim metodama merenja će naći neke druge vrednosti $A', B', \ldots$ za gornje fizičke veličine. Gornji fizički zakon u sistemu S' imaće opet oblik jedne ili više jednačina tipa

$$f_i\left(A', B', \ldots, \frac{\partial A'}{\partial x'^{\mu}}, \frac{\partial B'}{\partial x'^{\mu}}, \ldots\right) = 0 \tag{28}$$

gde prema navedenom zahtevu ova funkcija mora biti ista funkcija argumenata $A', B', \ldots$ kao i prvobitna funkcija f od argumenata $A, B, \ldots$

$$f_i\left(A', B', \ldots, \frac{\partial A'}{\partial x'^{\mu}}, \frac{\partial B'}{\partial x'^{\mu}}, \ldots\right) = f_i\left(A, B, \ldots, \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial B}{\partial x^{\mu}}, \ldots\right) \tag{30}$$

Drugim rečima, svaka relacija između fizičkih veličina koja izražava neki fizički zakon mora biti izražena u vidu *jednačine čiji oblik ostaje invarijantan pri prelazu na nove fizičke veličine i nezavisno promenljive.* To je tzv. <u>kovarijantna formulacija fizičkih veličina</u>.

9. Zakon održanja naelektrisanja

Proučimo sada elektrodinamiku sa gledišta specijalne teorije relativnosti (STR). Na osnovu drugog postulata, prema kome je brzina prostiranja elektromagntenih talasa u vakuumu ista u svim inercijalnim sistemima referencije, imamo razloga da verujemo da su zakoni elektrodinamike u saglasnosti sa zahtevima teorije relativnosti.

Ideja vodilja: kovarijantna formulacija fizičkih zakona, ali i ovde opštim postulatima moramo dodati i neki dopunski. U tom uvedimo zahtev da *zakon održanja naelektrisanja važi u svim inercijalnim sistemima*, što predstavlja ovde *dopunski postulat*.

U ma kom sistemu referencije zakon održanja naelektrisanja se izražava jednačinom kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0 \ . \tag{31}$$

Napišimo ovu jednačinu u razvijenom obliku

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} = 0$$

i uvedimo *divergenciju vektora u svetu Minkowskog*, koji se prema opštoj kovarijantnoj definiciji divergencije

$$\boxed{divA^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}} \tag{32}$$

i predstavlja skalar (unvarijantu). Imajući u vidu da su (x, y, z, ct) koordinate u svetu Minkowskog, vidimo da je izraz sa leve strane divergencija kvadrivektora

$$j^{\mu} = (j_x, j_y, j_z, c\rho)$$

jer samo divergencija skupa koji predstavlja kvadrivektor daje skalar u svetu Minkowskog, ili konciznije

$$\boxed{j^{\mu} = (\mathbf{j}, c\rho)}. \tag{33}$$

Tako definisan kvadrivektor, koji udružuje prostornu i strujnu gustinu u jednu celinu, naziva se *kvadrivektor gustine struje*. Ovaj kvadrivektor se može prikzati i kao

$$j^{\mu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{dt} \tag{34}$$

jer za $\mu = 1,2,3$ imamo $j^{i} = \rho v_{i}$, a za $\mu = 4$ biće $j^{4} = \rho c$, što je u saglasnosti sa (33). Tada jedančinu kontinuiteta možemo napisati pomoću kvadrivektora

$$\boxed{\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0} \tag{35}$$

gde se prema Ajnštajnovoj sumacionoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksu μ i ova jednačina izražava *zakon održanja naelektrisanja u kovarijantnom obliku*.

10. Jednačine elektromagnetnih potencijala

Pokušajmo sad da napišimo osnovne jednačine elektrodinamike u relativistički invarijantnom obliku. Za osnovne jednačine elktrodinamike možemo uzeti bilo *Maksvelove jednačine* za vakuum bilo odgovarajuće *jednačine elektromagnetnih potencijala*, koje su im ekvivalentne.
Pođimo od jednačina za elektromagnetne potencijale, koje u vakuumu imaju oblik

$$\begin{gathered} \Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{j} \\ \Delta\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \end{gathered} \tag{36}$$

gde smo uveli oznaku

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\ . \tag{37}$$

Pri tome skalarni i vektorski potencijal su povezani Lorencovim uslovom

$$div\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\,. \tag{38}$$

Relativistička invarijantnost ovih jednačina proizilazi iz toga što se one bez ikakvih izmena mogu napisati na kovarijantan način, tj. u tenzorskom obliku u svetu Minkowskog.
Napišimo Lorencov uslov u obliku

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial\left(\frac{1}{c}\phi\right)}{\partial\left(ct\right)}=0\ ,$$

vidimo da izraz sa leve strane predstavlja divergenciju kvadrivektora

$$\boxed{A^\mu=\left(\mathbf{A},\frac{1}{c}\phi\right)}, \tag{39}$$

koji možemo izraziti i pomoću kovarijantnih komponenata $\left(A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu\right)$ gde je čiji je metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ određen matricom (17):

$$A_\mu=\left(-\mathbf{A},\frac{1}{c}\phi\right) \tag{40}$$

tako da *Lorencov uslov* dobija vid

$$\boxed{\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=0}. \tag{41}$$

Vektor (39) udružuje skalarni i vektroski potencijal u jednu celinu i to je tzv. ***kvadrivektor elektromagnetnih potencijala***, koji u potpunosti određuje posmatrano elektromagnetno polje.

Kvadrivektor (39), na osnovu opštih obrazaca za transformaciju ma kog vektora $A'^{\mu}=\alpha_{\nu}^{\mu}A^{\nu}$, $\mu=1,2,3,4$ a sumiranje se vrši po indeksu ν, i još je $\alpha=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$:

$A'^{1}=\alpha_{\nu}^{1}A^{\nu}=\alpha_{1}^{1}A^{1}+\alpha_{2}^{1}A^{2}+\alpha_{3}^{2}A^{3}+\alpha_{4}^{1}A^{4}=\gamma\left(A^{1}-\beta A^{4}\right)$

$A'^{2}=\alpha_{\nu}^{2}A^{\nu}=A^{2}$

$A'^{3}=\alpha_{\nu}^{3}A^{\nu}=A^{3}$

$A'^{4}=\alpha_{\nu}^{4}A^{\nu}=\alpha_{1}^{4}A^{1}+\alpha_{2}^{4}A^{2}+\alpha_{3}^{4}A^{3}+\alpha_{4}^{4}A^{4}=\gamma\left(A^{4}-\beta A^{1}\right)$

imaćemo:

(42)

$$A'^{1}=\gamma\left(A^{1}-\beta A^{4}\right)=\frac{A^{1}-\frac{u}{c}A^{4}}{\sqrt{1-u^{2}/c^{2}}}=\frac{A_{x}-\frac{u}{c}\left(\frac{1}{c}\phi\right)}{\sqrt{1-u^{2}/c^{2}}}\equiv A_{x}'$$

$$A'^{2}=A^{2}=A_{y}\equiv A_{y}'$$

$$A'^{3}=A^{3}=A_{z}\equiv A_{z}'$$

$$A'^{4}=\gamma\left(A^{4}-\beta A^{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}/c^{2}}}\left(\frac{1}{c}\phi-\beta A^{1}\right)$$

$$\frac{1}{c}\phi'=\gamma\left(\frac{1}{c}\phi-\frac{u}{c}A_{x}\right)\Rightarrow\phi'=\frac{\phi-uA_{x}}{\sqrt{1-u^{2}/c^{2}}}$$

čime su određene ***transformacije skalarnog i vektrorskog potencijala***.

Vratimo se sad na diferencijalne jednačine za elektromagnetne potencijale. Ako jednačinu za skalarni potencijal pomnožimo sa $1/c$ i pri tome je $\frac{1}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\mu_0\frac{1}{c\varepsilon_0\mu_0}\rho=\mu_0 c\rho$, ova jednačina postaje

$$\Delta\left(\frac{1}{c}\phi\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{c}\phi\right)=-\mu_0 c\rho \tag{43}$$

Napišimo li sada i tri skalarne jednačine prve jednačine za vektorski potencijal, vidimo da s leve strane kao nepoznate funkcije figurišu komponente vektora (39) $A^\mu=\left(\mathbf{A},\frac{1}{c}\phi\right)$:

$$\begin{aligned}
\Delta A_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}&=-\mu_0 j_x\\
\Delta A_y-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2}&=-\mu_0 j_y\\
\Delta A_z-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}&=-\mu_0 j_z
\end{aligned}$$

a s desne strane uz $-\mu_0$ komponente vektora (16.3) $j^\mu=(\mathbf{j},c\rho)$. Prema tome, *tri skalarne diferencijalne jednačine za vektorski potencijal i jednu diferencijanu jednačinu za skalarni potencijal zajedno možemo napisati u obliku*

$$\boxed{\Delta A^\mu-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2}=-\mu_0 j^\mu} \tag{44}$$

Pri tome se i sam operator s leve strane, koji označavamo sa

$$\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{45}$$

i koji se naziva *d'Alebertov operator*, može napisati u kovarijantnom obliku. Naime, ako uvedemo Hamiltonov operator u svetu Minkowskog $\nabla=\partial/\partial x^\mu$ i formiramo njegov proizvod sa samim sobom, imaćemo

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x^4}=-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial(ct)}\frac{\partial}{\partial(ct)}$$

odnosno

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\Delta + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\Box} \tag{46}$$

Na osnovu ove operatorske relacije diferencijalne jednačine za elektromagnetne potencijale možemo napisati u strogo kovarijantnom obliku

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu} \tag{47}$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksu ν, ili konciznije

$$\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu . \tag{48}$$

Zaključak: *osnovne jednačine elektrodinamike se mogu prikazati u kovarijantnom obliku, invarijantnom u odnosu na Lorencove transformacije, te zakoni klasične elektrodinamike važe strogo i u STR*.

11. Tenzor elektromagnetnog polja

Pređimo sad na Maksvelove jednačine za vakuum, pa pokušajmo i njih da formulišemo u kovarijantnom obliku. Međutim, u ovom slučaju šest komponenata električnog i magnetnog polja ne možemo udružiti u neki kvadrivektor, već samo u izvestan antisimetrični tenzor u svetu Minkowskog, koji takođe ima šest nezavisnih komponenata.

Uvedimo skup veličina

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}} \tag{49}$$

gde su A_μ kovarijantne komponente kvadrivektora elektromagnetnih potencijala (40)

$$A_\mu = \left(-\mathbf{A}, \frac{1}{c}\phi\right).$$

Ako uvedemo pojam *rotor vektora u svetu Minkowskog*, koji se prema opštoj kovarijantnoj definiciji rotora definiše kao skup

$$\boxed{rotA_\mu = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)} \tag{50}$$

i predstavlja kovarijantan tenzor, neposredno vidimo da *skup $F_{\mu\nu}$ predstavlja rotor kvadrivektora elektromagnetnih potencijala.* U ovom slučaju čak i svaki pojedinačni član izraza (50) predstavlja tenzor.

Pošto iz gornjeg obrasca neposredno sledi $\boxed{F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}}$, skup $F_{\mu\nu}$ *predstavlja antisimetrični tenzor u svetu Minkowskog, koji ima šest nezavisnih komponenata*.

Kako nalazimo komponente tenzora $F_{\mu\nu}$?

Imajući u vidu relacije $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -gard\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ i

$$\boxed{A_\mu = (-\mathbf{A}, \frac{1}{c}\phi)}, \boxed{F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$$

imamo:

za $\mu=1$, $\nu=2$ imamo

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_2}{\partial y}=\frac{\partial(-A_y)}{\partial x}-\frac{\partial(-A_x)}{\partial y}=-rot_z\mathbf{A}=-B_z$$

za $\mu=1$, $\nu=3$ imamo

$$F_{13}=\frac{\partial A_3}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^3}\equiv\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial z}=\frac{\partial(-A_z)}{\partial x}-\frac{\partial(-A_x)}{\partial z}=rot_y\mathbf{A}=B_y$$

za $\mu=1$, $\nu=4$ imamo

$$F_{14}=\frac{\partial A_4}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^4}\equiv\frac{\partial\left(\frac{1}{c}\phi\right)}{\partial x}-\frac{\partial(-A_x)}{\partial(ct)}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}\left(-grad\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_x=-\frac{1}{c}E_x$$

itd., što možemo napisati i u vidu

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B_z & B_y & -\frac{1}{c}E_x\\ B_z & 0 & -B_x & -\frac{1}{c}E_y\\ -B_y & B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z\\ \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z & 0\end{pmatrix} \tag{51}$$

Ovako uveden tenzor naziva se ***tenzor elektromagnetnog polja*** i on udružuje jačine električnog polja i magnetnu indukciju, pokazujući da su ***električno i magnetno polje uzajamno povezani u jednu nerazdvojnu celinu***, slično prostoru i vremenu u kinematici ili impulsu i energiji u mehanici.

Odgovarajući kontravarijantni tenzor elektromagnetnog polja, je sastavljen od komponenata

$$F^{\mu\nu}=g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}A_{\rho\sigma}$$

odnosno

$$\boxed{F^{\mu\nu}=\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}}\,. \tag{52}$$

Njegove komponente možemo dobiti polazeći od komponenata prethodnog kovarijantnog tenzora na osnovu relacija $A_{ik} = A^{ik}$ za $i,k = 1,2,3$ i $A_{i4} = -A^{i4}$ i $A_{44} = A^{44}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & 0 & -B_x & \frac{1}{c}E_y \\ -B_y & B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

U oba slučaja vidimo da komponete magnetne indukcije formiraju submatricu od prve tri vrste i kolone, a komponente električnog polja pomnožene sa $1/c$ formiraju četvrtu vrstu i kolonu.

<u>Dualni tenzori</u>: Sem ovih tenzora mogu se formulisati i odgovarajući dualni tenzori, koji predstavljaju *pseudotenzore*, na sledeći način. Ako se uvede simbol

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{ako je permutacija } \mu\nu\rho\sigma \text{ parna} \\ \text{-1} & \text{ako je permutacija } \mu\nu\rho\sigma \text{ neparna} \\ 0 & \text{ako su bar dva indeksa jednaka} \end{cases} \tag{54}$$

koji predstavlja generalizaciju simbola Levi-Civita i predstavlja pseudotenzor, možemo definisati tenzor *dualan tenzoru* $F^{\mu\nu}$ obrascem

$$\boxed{F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}}. \tag{55}$$

Na primer, za $\mu = 1$, $\nu = 2$, prema shemi (51)

$$F^{*12} = \frac{1}{2}e^{12\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(e^{1234}F_{34} + e^{1243}F_{43}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(F_{34} - F_{43}\right) = F_{34} = -\frac{1}{c}E_z$$

Slično se mogu dobiti i ostali elementi, što zajedno možemo skupiti u matricu

$$F^{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_z & \frac{1}{c}E_y & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & 0 & -\frac{1}{c}E_x & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z \\ B_x & B_y & B_z & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Ona se razlikuje od matrice (51) po tome što su ovde izmenjene uloge električnog i magnetnog polja, naime komponente B_i zamenjene su sa $\frac{1}{c}E_i$ i obrnuto.

12. Kovarijantna formulacija Maksvelovih jednačina

Da bismo formulisali Maksvelove jednačine za vakuum

$$
\begin{aligned}
&div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\ div\mathbf{B} = 0 \\
&rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \ rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

u kovarijantnom obliku, pođimo od diferencijalnih jednačina za elektromagnetne potencijale

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$$

i kontravarijanog tenzora elektromagnetnog polja

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}}$$

Ako diferenciramo obe strane tenzora $F^{\mu\nu}$ po x^ν imaćemo

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu},$$

pri čemu se prema Ajnštajnovoj sumacionoj konvenciji podrazumeva sumiranje po indeksu ν, i što se može napisati i u obliku

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\ . \tag{58}$$

Prvi član na osnovu Lorencovog uslova, $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$ otpada, a drugi možemo zameniti kvadrivektorom gustine struje $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ čime dobijamo

$$\boxed{\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\mu_0 j^\mu}. \tag{59}$$

Ovo je *<u>prva grupa Maksvelovih jednačina u kovarijantnom obliku, koja predstavlja kovarijantnu formulaciju prve i četvrte Maksvelove jednačine</u>*.

Naime, pošto su diferencijalne jendačine elektromagnetnih potencijala ekvivalentne prvoj i četvrtoj Maksvelovoj jednačini, iz kojih su i dobijene, gornji sistem od četiri jednačine ekvivalentan je ovim jednačinama.

Na primer, za $\mu = 1$ imaćemo

$$\frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = -\mu_0 j^1 \ ,$$

odnosno

$$\frac{\partial(-B_z)}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial\left(-\frac{1}{c}E_x\right)}{\partial(ct)} = -\mu_0 j_x$$

a ova jednačina napisana u obliku

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

poklapa se sa prvom skalarnom jednačinom četvrte Maksvelove jednačine.

S druge strane, diferenciranjem kovarijantnog tenzora elektromagnetnog polja $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ po x^ρ ($\rho \neq \mu, \nu$) daje

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \ . \tag{60}$$

Odavde cikličnom permutacijom proizilazi

$$\frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\rho \partial x^\mu}, \ \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \ ,$$

pa sabiranjem ovih jednačina nalazimo da je zbir izraza s leve strane identički jednak nuli

$$\boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0}. \tag{61}$$

To je *druga grupa Maksvelovih jednačina u kovarijantnom obliku, koja predstavlja kovarijantnu formulaciju druge i treće Maksvelove jednačine.*

Na primer, $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 3$ imaćemo

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial\left(-B_z\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(-B_x\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(-B_y\right)}{\partial y}=0,$$

što se svodi na

$$div\mathbf{B}=0$$

i predstavlja drugu Maksvelovu jednačinu.

Jednačinu (61) možemo napisati i na jednostavniji način, sličan jednačini (59), pomoću pojma dualnog tenzora $F^{*\mu\nu}$. Konačno se dobija:

$$\boxed{\frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=0}. \qquad (62)$$

Prema tome, Maksvelove jednačine za vakuum mogu se napisati u vidu dveju kvadrivektroskih jednačina (59) i (62) sličnog oblika, pri čemu u jednoj od njih figuriše sam tenzor elektromagnetnog polja, a u drugoj odgovarajući dualni tenzor.

5. Transformacije električnog i magnetnog polja

Na osnovu dobijenih rezultata ispitajmo sad kako se transformišu karakteristike elektromagnetnog polja pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi. Potražimo prvo zakon po kome se transformišu komponente jačina električnog i magnetnog polja. Znajući da su ove komponente udružene u antisimetričan tenzor elektromagnetnog polja (53)

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{1}{c}E_x \\ B_z & 0 & -B_x & \frac{1}{c}E_y \\ -B_y & B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

na osnovu opštih obrazaca za transformaciju ma kog antisimetričnog tenzora:

$$\boxed{A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\rho\sigma} = \alpha^{\mu}_{\rho} \alpha^{\nu}_{\sigma} A^{\rho\sigma}}$$

$$A'^{12} = \gamma\left(A^{12} + \beta A^{24}\right),\ A'^{13} = \gamma\left(A^{13} + \beta A^{34}\right),\ A'^{14} = A^{14}$$

$$A'^{23} = A^{23},\ A'^{24} = \gamma\left(A^{24} + \beta A^{12}\right),\ A'^{34} = \gamma\left(A^{34} + \beta A^{13}\right)$$

imaćemo:

$$-B'_z = \frac{-B_z + \beta\left(\frac{1}{c}E_y\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ B'_y = \frac{B_y + \beta\left(\frac{1}{c}E_z\right)}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{1}{c}E'_x = \frac{1}{c}E_x$$

$$-B'_x = -B_x\ ,\ \frac{1}{c}E'_y = \frac{\frac{1}{c}E_y + \beta\left(-B_z\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\ \frac{1}{c}E'_z = \frac{\frac{1}{c}E_z + \beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,$$

a otuda dobijamo veze između komponenata jačina polja u dva inercijalna sistema

$$E'_x = E_x,\ E'_y = \frac{E_y - uB_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\ E'_z = \frac{E_z + uB_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$
$$B'_x = B_x,\ B'_y = \frac{B_y + \frac{u}{c^2}E_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\ B'_z = \frac{B_z - \frac{u}{c^2}E_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{63}$$

Ako komponente u pravcu kretanja sistema S' i u normalnom pravcu označimo sa $\parallel$ i $\perp$, i uzmemo u obzir da brzina ovog sistema $\mathbf{u}$ ima komponente $(u,0,0)$, gornje obrasce možemo napisati i u vektorskom obliku

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel},\ \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}_{\perp}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel},\ \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}\times\mathbf{E}_{\perp}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{64}$$

Gornje relacije izražavaju *zakon transformacije komponenata jačina električnog polja i magnetne indukcije pri prelazu iz jednog inercijalnog sistema u drugi*. Pre svega vidimo da se <u>komponente u pravcu kretanja sistema S'</u> **<u>ne menjaju</u>**<u>, dok normalne komponente trpe promene i zavise kako od jednog tako i od drugog polja</u>. Iz gornjih relacija dalje proizilazi da *i u slučaju kad u nekom inercijalnom sistemu nema električnog ili magnetnog polja u drugom ono će se pojaviti.* <u>Na taj način vidi se i eksplicitno kako su elektično i magnetno polje u STR uzajamno povezani u elektromagnetno polje kao</u> **<u>jedinstvenu objektivnu realnost</u>**<u>.</u>

<u>Fizički smisao relacija</u> <u>(64)</u>:

Fizički smisao relacija (64) jasnije se može sagledati ako se ograničimo na male brzine u u odnosu na brzinu svetlosti $u \ll c$. Tada druga relacija pokazuje da ako se naelektrisanje e kreće u magnetnom polju u odnosu na sistem posmatrača izvesnom brzinom u, posmatrač u ovom sistemu zapaža da na ovo naelektrisanje dejstvuje efektivno električno polje jačine

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} \tag{65}$$

koja pomnožena sa e predstavlja Lorencovu silu. Iz toga međutim ne proizilazi, da je Lorencova sila relativistički korektna samo pri malim brzinama, a iz daljeg izlaganja ćemo se uveriti u njen strogo relativistički karakter. S druge strane, razmatranjem kretanja konture koja se kreće kroz nehomogeno magnetno polje može se pokazati da posmatrač u sistemu koji se kreće zajedno sa ovom konturom zapaža, u istoj aproksimaciji, s tačnošću do članova reda veličine β^2, *efektivno magnetno polje* jačine

$$\mathbf{B}_{eff} = \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E} \tag{66}$$

Najzad, podvucimo da **invarijantnost Maksvelovih jednačina** označava da se pri prelazu u drugi inercijalni sistem menjaju **ne samo** komponente polja po navedenim zakonima, već i prostorna i strujna gustina po zakonima koji proizilaze iz kvadrivektorskog skupa (33) $j^{\mu} = \left(\mathbf{j}, c\rho\right)$, kao i same nezavisno promenljive x, y, z i t prema Lorencovim transformacijama. Tako na primer prva skalarna jednačina koja odgovara poslednjoj Maksvelovoj jednačini (33) u sistemu S

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

pri prelazu u sistem S' dobija oblik

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0 j'_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_x}{\partial t'} .$$

14. Invarijante polja

Pokažimo sad da izvesne veličine ostaju invarijante pri prelazu u drugi inercijalni sistem. Jedna takva veličina je

$$\boxed{I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \tag{67}$$

gde se podrazumeva sumiranje po indeksima μ i ν, što je prema samom načinu formiranja skalar (invarijanta). Napišimo eksplicitno ovaj izraz, imajući u vidu da su različiti od nule samo članovi sa različitim indeksima

$$\begin{aligned} I_1 = {} & F_{12}F^{12} + F_{21}F^{21} + F_{13}F^{13} + F_{31}F^{31} + F_{14}F^{14} + F_{41}F^{41} + \\ & + F_{23}F^{23} + F_{32}F^{32} + F_{24}F^{24} + F_{42}F^{42} + F_{34}F^{34} + F_{43}F^{43} \end{aligned}$$

Ako ovde uvrstimo odgovarajuće komponente tenzora (51) i (53), dobićemo

$$I_1 = 2B_z^2 + 2B_y^2 - \frac{2}{c^2}E_x^2 + 2B_x^2 - \frac{2}{c^2}E_y^2 - \frac{2}{c^2}E_z^2$$

odnosno, s obzirom na (37) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\boxed{I_1 = 2\left(B^2 - \frac{1}{c^2}E^2\right) = 4\mu_0\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)} \tag{68}$$

Iz izlaganja o energiji elektromagnetnog polja vidimo da prvi član u zagradi predstavlja gustinu energije magnetnog polja, a drugi gustinu energije električnog polja, dok je ceo izraz srazmeran gustini Lagranževe funkcije čistog elektromagnetnog polja.

Sem ove može se formulisati još jedna invarijanta, pomoću pojma dualnog tenzora

$$\boxed{I_2 = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}} \tag{69}$$

Ova veličina je prema samom načinu formiranja takođe skalar, ali ne pravi već pseudoskalar, jer je $F^{*\mu\nu}$ pseudotenzor, što znači da se pri svim transformacijama ponaša kao skalar sem pri ogledanju koordinata, kad menja znak. Ako razvijemo ovaj izraz i uvrstimo komponente ovih tenzora, na sličan način kao malo pre, posle sređivanja dobićemo

$$\boxed{I_2 = \frac{4}{c}\left(E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z\right)}. \tag{70}$$

Iz invarijantnosti ovih izraza može se dobiti nekoliko značajnih posledica.

1. Ako je u nekom sistemu refrencije $I_1 = 0$ odnosno $\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$ i u svakom drugom inercijalnom sistemu biće $\varepsilon_0 E'^2 = \frac{1}{\mu_0} B'^2$, a ako je $\varepsilon_0 E^2 > \frac{1}{\mu_0} B^2$ ili $\varepsilon_0 E^2 < \frac{1}{\mu_0} B^2$, ta osobina takođe ostaje očuvana. To znači da *ako su u nekom inercijalnom sistemu gustine energija električnog i magnetnog polja međusobno jednake ili ako je jedna od njih veća od druge, one će ostati jednake odnosno prva ostaće veća od druge i u svakom drugom inercijalnom sistemu.*

2. Ako je pak $I_2 = 0$ odnosno $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ biće i $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$, a ako je $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} > 0$ ili $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} < 0$, to će takođe ostati u važnosti. Prema tome, *ako su u nekom inercijalnom sistemu vektori jačina električnog polja i magnetne indukcije uzajamno normalni ili grade oštar (ili tup) ugao, oni će ostati normalni odnosno graditi oštar (ili tup) ugao i u svakom drugom inercijalnom sistemu*.

3. Ako su obe invarijante jednake nuli: $I_1 = 0$ i $I_2 = 0$, biće $B = \frac{1}{c} E$ i $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, a zbog invarijantnosti ovih izraza i u ma kom drugom inercijalnom sistemu biće $B' = \frac{1}{c} E'$ i $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$.

To znači da *ako su u nekom inercijalnom sistemu gustine energije električnog i magnetnog polja međusobno jednake i ako su vektori E i B međusobno normalni, ove osobine ostaće očuvane i u svakom drugom inercijalnom sistemu referencije*.